TEORÍA DE JUEGOS

Ventura Marquez y Raimundo Jiménez

Problema 1.
En un tablero de dimensiones 4×4

1. Demuestra que se pueden colocar siete fichas, cada una en una casilla distinta, de forma que al eliminar dos filas y dos columnas cualesquiera, siempre quede alguna ficha sin eliminar.
2. Demuestra que si colocamos sólo seis fichas, siempre pueden eliminarse dos filas y dos columnas de forma que todas las fichas sean eliminadas

Problema 2.
La suma de las edades de los 120 estudiantes que participaron el año pasado en la fase final de la Olimpiada Matemática fue de 2002 años. Demostrar que existen 3 de ellos tales que la suma de sus edades no es menor de 51 años.

Problema 3.
En una reunión hay 201 personas de 5 nacionalidades diferentes. Se sabe que, en cada grupo de 6, al menos dos tienen la misma edad. Demostrar que hay al menos 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.

Problema 4.
En un tablero de ajedrez colocamos 24 fichas ocupando las 3 filas superiores. Podemos cambiar la posición de las fichas haciendo saltar una por encima de otra a un hueco libre en cualquier dirección (horizontal, vertical o diagonal). ¿Se puede conseguir así llevar las 24 fichas a las tres filas inferiores?

Problema 5.
Un tablero rectangular de dimensiones m×n se cubre con piezas de tamaños 2×2 y 1×4 (sin solapamiento ni salirse del tablero). Una vez cubierto se sustituye una pieza de un tipo por otra del otro tipo. ¿Es posible recolocar todas las piezas para seguir recubriendo todo el tablero?

Problema 6 (P6, Nacional OME, 2004).
Colocamos, formando una circunferencia, 2004 fichas bicolores: blancas por una cara y negras por la otra. En cualquier momento podemos elegir una ficha con la cara negra hacia arriba, y dar la vuelta a tres fichas: la elegida, la de su derecha y la de su izquierda. Supongamos que inicialmente hay una sola ficha con la cara negra hacia arriba. ¿Será posible, repitiendo el movimiento descrito, conseguir que todas las fichas tengan la cara blanca hacia arriba? ¿Y si tuviéramos 2003 fichas, entre las cuales exactamente una tiene al comienzo la cara negra hacia arriba?

venturamargri@gmail.com y raijimlar@alum.us.es

Problema 7.
En un torneo de ajedrez participan ocho maestros durante siete días. Cada día se disputan cuatro partidas en las cuales participan todos los maestros, y al finalizar el torneo todos se han enfrentado contra todos exactamente una vez. Demostrar que al terminar el quinto día del torneo existe un conjunto de al menos cuatro maestros que ya han jugado entre ellos todas las partidas.

Problema 8.
Los 8 piratas más famosos del mundo se unen en una misma tripulación con el objetivo de encontrar un tesoro muy prestigioso, el cual contiene 500 diamantes. Finalmente, consiguen encontrarlo y tienen que hallar una forma de hacer el reparto, se usa el método siguiente:

1. Se le otorga a cada pirata un número que indica el orden (1, 2, 3,...)
2. El primer pirata propone un reparto, el cual es sometido a votación.
3. Si el 50%, o más, está a favor, ese será el reparto utilizado. En cualquier otro caso, tiran al pirata por la borda y, evidentemente, queda fuera del reparto. Ahora sería el segundo pirata quien tendría que proponer una idea.
4. Se va repitiendo todo el proceso hasta que el 50% o más está a favor.

Estos 8 piratas son conocidos por ser extremadamente listos, y es que pueden deducir, a la perfección, lo que el resto de piratas están pensando. ¿Cuál es la mayor cantidad de diamantes que puede conseguir el primer pirata?

Problema 9
Demuestra que una cuadrícula 6x6 no puede ser rellenada con tetrominós con forma de L.

Problema 10 (P2, Olimpiada Matemática Argentina, 2014).
Un dispositivo electrónico con dos teclas, una roja y una amarilla, muestra en su pantalla un número entero. Al apretar la tecla roja el número n de la pantalla se reemplaza por $2n-7$ y al apretar la tecla amarilla el número n de la pantalla se reemplaza por $3n-14$. Comenzando con
$n=77$ y después de apretar varias veces las teclas, aparece en la pantalla un número N mayor que 777777. Hallar el menor de tales números N.

Problema 11
Ana y Benito juegan un juego que consta de 2020 rondas. Inicialmente, en la mesa hay 2020 cartas, numeradas de 1 a 2020, y Ana tiene una carta adicional con el número 0. En la ronda k-ésima, el jugador que no tiene la carta $k-1$ decide si toma la carta k o si se la entrega al otro jugador. El número de cada carta indica su valor en puntos. Al terminar el juego, gana quien tiene más puntos. Determina qué jugador tiene estrategia ganadora, o si ambos jugadores pueden forzar el empate, y describe la estrategia a seguir.

Problema 12
Doscientos estudiantes participaron en un concurso de matemáticas. Tuvieron que resolver 6 problemas. Se sabe que cada problema fue resuelto correctamente por al menos 120 estudiantes. Prueba que deben haber dos participantes tales que cada problema fue resuelto por al menos uno de ellos.

Problema 13 (P5, Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, 2001)
Las casillas de un tablero de *2000×2001* tienen coordenadas (*x,y*), con *x* e *y* enteros tales que $0 \leq x \leq 1999$ e $0 \leq y \leq 2000$. Una nave en el tablero se mueve de la siguiente manera: antes de cada movimiento, la nave está en la posición (*x,y*) y tiene una velocidad (*h,v*), donde *h* y *v* son enteros. La nave escoge una nueva velocidad (*h′,v′)* de forma que *h′−h* y *v′−v* son iguales a −1, 0 ó +1. La nueva posición de la nave será (*x′,y′*), donde $x' \equiv x + h'$ (mod 2000) e ó $y' \equiv y + v'$ (mod 2001)
.
Hay dos naves en el tablero: la marciana y la terrestre, que quiere atrapar a la marciana. Inicialmente, cada nave está en una casilla del tablero y tiene velocidad (0,0). Se mueven alternativamente, siendo la primera la terrestre, que atrapará a la marciana si después de un movimiento cae en su posición. ¿Existe una estrategia que siempre le permita a la nave terrestre atrapar a la nave marciana, cualesquiera que sean las posiciones iniciales?

Problema 14 (P5, IMO shortlist, 1993).
En un tablero de ajedrez infinito, se juega al siguiente solitario. Al principio tenemos n^2 fichas que ocupan n^2 casillas que forman un cuadrado de lado n. El único movimiento permitido es que una ficha salte horizontal o verticalmente por encima de una casilla ocupada hasta una casilla libre, eliminando la ficha por encima de la que se ha saltado. El jugador gana si consigue que quede una sola ficha en el tablero al cabo de un cierto número de movimientos. ¿Para qué enteros positivos n se puede ganar a este juego?

Problema 15 (P3, IMO, 2017)
Un conejo invisible y un cazador juegan como sigue en el plano euclídeo. El punto de partida A_0 del conejo, y el punto de partida B_0 del cazador son el mismo. Después de *n - 1* rondas del juego, el conejo se encuentra en el punto A_{n-1} y el cazador se encuentra en el punto B_{n-1}. En la n-ésima ronda del juego, ocurren tres hechos en el siguiente orden:

1. El conejo se mueve de forma invisible a un punto A_n tal que la distancia entre A_{n-1} y A_n es exactamente 1.
2. Un dispositivo de rastreo reporta un punto P_n al cazador. La única información segura que da el dispositivo al cazador es que la distancia entre P_n y A_n es menor o igual que 1.
3. El cazador se mueve de forma visible a un punto B_n tal que la distancia entre B_{n-1} y B_n es exactamente 1.

¿Es siempre posible que, cualquiera que sea la manera en que se mueva el conejo y cualesquiera que sean los puntos que reporte el dispositivo de rastreo, el cazador pueda escoger sus movimientos de modo que después de 10^9 rondas el cazador pueda garantizar que la distancia entre él mismo y el conejo sea menor o igual que 100?